ACERCA DE LOS PRODUCTOS DE DISTRIBUCIONES Y EL CUADRADO DE LA DELTA DE DIRAC

Conferencia pronunciada
por el Académico Correspondiente
Dr. Manuel Antonio Aguirre Téllez
en oportunidad de su incorporación
a la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires,
en la sesión pública del 29 de junio de 2011

Discurso de recepción
por el Académico Titular Dr. Álvaro González Villalobos

Es para mí un honor tener la oportunidad de presentar y darle la bienvenida, en esta ceremonia, al Dr. Manuel Antonio Aguirre Téllez, recientemente designado Académico Correspondiente de esta casa.

El Dr. Aguirre Téllez es un distinguido matemático, que ha realizado, en particular, una relevante contribución tanto en la investigación y enseñanza de la matemática como en la administración y organización de la ciencia en el país y también en su país de nacimiento, Nicaragua, donde es el principal responsable de iniciar el estudio de la matemática superior.

Como investigador en matemática, su labor fundamental se ha concentrado en el Análisis Funcional, especialmente en la Teoría de Funciones Generalizadas. Sus resultados sobre Teoría de Distribuciones, ecuaciones en derivadas parciales, series e integrales de Fourier, constituyen un importante aporte a la Matemática Pura y sus aplicaciones a la Teoría cuántica de campos.

Ha publicado, hasta ahora, más de cien importantes trabajos de investigación en revistas científicas de reconocido prestigio internacional. Ha dado también, en muchos países del mundo, cursos y conferencias sobre su especialidad. Sus publicaciones incluyen también libros y cursos. Es Investigador Científico de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

Otro aspecto destacable de la trayectoria del Dr. Aguirre Téllez lo constituye su labor como maestro. Cabe señalar que ha dedicado, y dedica, buena parte de su tiempo a la enseñanza y formación de alumnos principalmente en la Argentina y en Nicaragua.

Como organizador y administrador de la ciencia su trabajo ha sido y es especialmente importante. Basta recordar la creación de carreras de Matemática Superior en Argentina y Nicaragua y la constitución de reuniones nacionales e internacionales de investigación matemática en Argentina, Costa Rica, Guatemala, Nicaragua y

Panamá. Es en la actualidad Decano de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, y Coordinador Externo de la Maestría en Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua. Y también el creador, y primer Presidente, de la Sociedad Matemática Nicaragüense.

Su encomiable labor ha sido reconocida en numerosas oportunidades. Por ejemplo, el Dr. Manuel Antonio Aguirre Téllez es "Doctor honoris causa" de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, universidad que lo nombró también "Profesor Honorario"; la creación de la *Orden al MéritoCientífico, Pedagógico y Humanístico Dr. Manuel Antonio Aguirre Téllez*, de Nicaragua, la *Medalla de Honor "Dr. Edgardo Buitrago Buitrago"*, otorgada por la Universidad de Occidente en León, Nicaragua; el Gobierno de Nicaragua a través del Ministerio de Educación, le otorga certificado de reconocimiento a su labor docente y científica en la Escuela Normal de Jinotepe, Carazo, y además lo distingue con la denominación de la Escuela Primaria que lleva su nombre; ha sido galardonado por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires con el "Premio a la Producción Científica 1999", y hace ya unos quince años, la Municipalidad de El Rosario, en Nicaragua lo declaró "Hijo dilecto de la Intelectualidad Nicaragüense". Esta es una muestra de los honores que le han sido conferidos en su carácter de investigador científico, maestro, administador y organizador de la ciencia, y hombre de bien.

El Dr. Aguirre Téllez nos presentará ahora una conferencia titulada *"Acerca de los productos de distribuciones y el cuadrado de la delta de Dirac"*.

Para terminar, quiero agradecerle, en nombre de los Académicos de esta casa, la deferencia de viajar, a poco de ser designado, a este acto de incorporación, y darle otra vez nuestra calurosa bienvenida como Académico Correspondiente.

ACERCA DE LOS PRODUCTOS DE DISTRIBUCIONES Y EL CUADRADO DE LA DELTA DE DIRAC

Dr. Manuel Antonio Aguirre Téllez

Es para mí un honor que esta prestigiosa Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires haya decidido mi incorporación como miembro correspondiente. Agradezco fraternalmente a todos los académicos por esta honrosa distinción que me han conferido. Distinción, que considero un alto privilegio y una gran responsabilidad que he de cumplir.

Es motivo de orgullo el haber sido designado académico Correspondiente durante la presidencia del Dr. Hugo F. Bauzá quien ha desarrollado una excelente obra científica exaltando la cultura y el humanismo.

Quiero agradecer al destacado matemático de renombre internacional Dr. Álvaro González Villalobos, científico de trayectoria sobresaliente con grandes contribuciones en el campo de las Estadísticas Agropecuarias en la Argentina, quien ha tenido la gentileza de pronunciar el generoso discurso de mi recepción. Mi más profunda gratitud.

Quiero referirme al Dr. Alberto González Domínguez a quien tributo mi profundo respeto y admiración, a quien recuerdo por su profundo dominio de la palabra, como un hombre que privilegiaba la investigación científica, la trasmisión del conocimiento científico con elegancia, gran entusiasta de la matemática e inspirador de generaciones de estudiantes.

Quiero agradecer al Dr. Julio Olivera, amigo maestro, economista de relevancia internacional y matemático destacado, científico de trayectoria sobresaliente con grandes contribuciones en el campo de la Economía y en el campo de la Matemática, con quien he compartido sesiones de comunicaciones científicas en reuniones de la Unión Matemática Argentina y conferencias de matemática en sesiones ordinarias de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires. Mi más profunda expresión de respeto y gratitud.

Quiero agradecer al Dr. Fausto Gratton, científico de relevancia internacional de trayectoria sobresaliente con grandes contribuciones en el campo de la Física, con quien he compartido reuniones de trabajo y sesiones de comunicaciones científicas en distintas oportunidades. Mi más profundo respeto y gratitud.

Quiero aprovechar esta importante ocasión para expresar mi admiración por la Doctora Susana Elena Trione, quien dirigió mi Tesis Doctoral y con quien hemos compartido días de trabajo tratando de resolver problemas de nuestra especialidad en matemática; agradezco su paciencia, su entusiasmo y fuerza motivadora para despertarme el gusto en la investigación de la matemática.

Deseo manifestar un agradecimiento especial a mi familia que me ha acompañado, creo que con agrado, en mi desarrollo tanto en el campo científico como mis actividades en el campo social.

Agradezco la presencia de tan distinguida audiencia y a colegas de muchos países del mundo de quienes he recibido su amistad y adhesión.

Resumen

Vamos a dividir la presentación de esta conferencia en cuatro grandes aspectos:

I. Generalidades acerca de los productos de distribuciones.
   a) Operaciones
   b) Imposibilidad de multiplicar dos distribuciones
   c) Significado del producto de dos distribuciones $S.T$
   d) ¿Cómo enfrentamos un problema de producto de distribuciones con la teoría que tenemos a mano?
   e) ¿Dónde aparecen en Matemática algunas situaciones vinculadas con productos de distribuciones?

III. Un modelo matemático vinculado a productos de distribuciones.

IV. Nuevos resultados relacionados con soluciones elementales y fórmulas de iteración.

I. Generalidaes acerca de los productos de distribuciones

a) Operaciones

Dentro del análisis clásico no lineal podemos observar modelos que incluyen:

I. Operaciones no lineales
II. Operaciones de diferenciación
III. Objetos singulares (como medidas o funciones no diferenciables).

En el análisis clásico se estudian I y II mientras que la teoría de distribuciones está vinculada con I, II y III.

b) Imposibilidad de multiplicar dos distribuciones

En el estudio de la teoría de distribuciones surge la pregunta:

¿Es cierto en general que la multiplicación de dos distribuciones arbitrarias es imposible?

Para dar una respuesta a esta cuestión, permítame examinar la situación y ver que obstáculos aparecen en este estudio.

Podríamos considerar dos categorías:

1) Una que llamaríamos "Multiplicación Intrínseca" de distribuciones. En esta categoría se trata de intentar definir el producto de dos distribuciones y que resulte de nuevo una distribución.
   De los estudios realizados una operación la cual podría dar valores razonables al producto de cualquier par de distribuciones parece que sea imposible. Merece la pena señalar que el problema ya empezó con los productos de dos funciones en general.
   El problema lo encontramos en relación a la no estabilidad con respecto a la regularización y pasaje al límite.

2) La segunda categoría de contraejemplo a la situación planteada está relacionada con las Álgebras diferenciales que contienen el espacio de distribuciones. En tales álgebras el producto de cualquiera de dos distribuciones está definido.
   Lo que hace imposible ahora es tener ciertamente deseable propiedades algebraicas (como asociatividad o conmutatividad) y al mismo tiempo consistencia del nuevo producto y la nueva derivada con la correspondiente operación clásica en aquellos subespacios donde son definidos.
   Podemos observar por otra parte que como extensión de productos de funciones regulares a medidas, ya tenemos situaciones de no asociatividad. Veamos:

   No asociatividad en el producto $C^{\infty} \cdot D'$.

Como extensión de funciones regulares a medidas para definir el producto de una función $f \in C^{\infty}(R)$ y una distribución $w \in D'$, por definición se tiene $\langle wf, \varphi \rangle = \langle w, f\varphi \rangle$ para cada $\varphi \in D(R)$.

Usando la definición, se tiene que:

a) $\delta(x) \cdot 1 = \delta(x)$

b) $\delta(x) \cdot x = 0$

c) $x \cdot vp\dfrac{1}{x} = 1$

De estas fórmulas resulta la no asociatividad del producto definido anteriormente:

$$0 = (\delta(x) \cdot x) \cdot vp\frac{1}{x} \neq \delta(x) \cdot \left(x \cdot vp\frac{1}{x} \right) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x)$$

Una interpretación de este cálculo presenta primeramente la restricción en incrustar las distribuciones en las álgebras diferenciables:

Si $D'(R)$ está linealmente contenida en el álgebra A, se sigue de las tres propiedades anteriores que no puede tener simultáneamente una multiplicación en A.

En otras palabras el producto $C^{\infty} \cdot D'$ debe ser necesariamente cambiado en A.

La imposibilidad de multiplicar dos distribuciones en forma arbitraria y que dicha multiplicación sea compatible con la multiplicación de números reales fue señalada por Laurent Schwartz en 1954.

c) Significado del producto de dos distribuciones S.T

Dentro de este gran espectro de la multiplicación de distribuciones podemos señalar algunos aspectos generales:

Si bien no existe una definición general que nos permita multiplicar en forma arbitraria dos distribuciones y que dé como resultado otra distribución, sin embargo para un par específico de distribuciones T y S, siempre es posible dar un significado al producto $S.T$.

En esa búsqueda de darle sentido a tal producto aparecen distintos métodos que a veces se pueden aplicar directamente pero en otros casos hay que construir estructuras nuevas para resolver tal situación. Podemos señalar algunas definiciones estándares.

Una muy usada para definir productos de distribuciones es la siguiente:

Sea $g(t)$ con $-\infty < t < \infty$ una función de variable real verificando las propiedades:

a) $g(t) \in C^{\infty}(R)$

b) Soporte $g(t) = [-1,1]$

c) $g(t) \geq 0$

d) $g(-t) = g(t)$

e) $g(t)$ es creciente en $-1 \leq t \leq 0$

f) $g(t)$ es decreciente en $0 \leq t \leq 1$

g) $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$

Considerando ahora la sucesión de funciones

$g_n(t) = ng(nt), n = 1,2,...$

Es sabido que $g_n(t)$ es una sucesión suave, es un núcleo singular y que verifica que $g_n(t) \to \delta$ cuando $n \to \infty$ en el sentido distribucional.

En estas condiciones, si consideramos dos distribuciones arbitrarias S y T se define su producto por medio de la siguiente fórmula:

$$S \cdot T = \lim_{n \to \infty} \{S * g_n\} \cdot \{T * g_n\} \text{ cuando } n \to \infty$$

siempre que dicho límite exista, donde el símbolo * significa convolución.

Otro método para multiplicar distribuciones, es usando la transformada de Fourier de distribuciones temperadas.

Si se tienen dos distribuciones S y T, tal que S pertenece al espacio S' (dual de S, y S es el espacio de Schwartz) y T pertenece al espacio O_m (espacio de funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas son suavemente crecientes que están acotadas por polinomios), en estas condiciones se define $S.T$ por medio de la fórmula:

$$S \cdot T = F^{-1}\{F(S) * F(T)\}.$$

Después de estas dos formas generales de definir distribuciones hay una buena cantidad de definiciones particulares según el caso objeto de estudio.

Por ejemplo existe un método que consiste esencialmente en aproximar ambos factores del producto por familias de funciones distribucionales y el resultado final se obtiene por pasaje al límite.

También se conocen los métodos de Alberto González Domínguez, y Roque Scarfiello, Jan Mikusiñski, Susana Elena Trione, Brian Fisher, Klauss Keller, entre otros.

d) ¿Cómo enfrentamos un problema de producto de distribuciones con la teoría que tenemos a mano?

Si el objeto de estudio cumple las propiedades de ser temperado entonces estamos en camino firme para llegar a alguna solución.

Si no es temperado entonces buscamos que cumpla la propiedad de ser homogéneo, ¿por qué?

Porque tenemos un teorema que nos dice: "Que toda distribución homogénea es temperada".

Si no cumple la propiedad de ser homogénea entonces tenemos que elaborar una definición propia que permita respetar resultados y propiedades ya existentes.

Por otra parte, podemos señalar que con la introducción del estudio de distribuciones asociadas a formas cuadráticas y en general a variedades de dimensión menor que la dimensión del espacio, introducidas por Israel Moiseevich Gel'fand, fallecido el 5 de octubre de 2009, en su libro *Generalized Functions*, Vol. 1, Academic Press, 1964.

Aparecen los retos de darle sentido a propiedades de productos de distribuciones asociados a variedades diferenciables de dimensión menor que la dimensión del espacio.

Uno puede visualizar dos tipos de situaciones:

a) Cuando se trata de estudiar estas variedades infinitamente diferenciables sin puntos singulares.
b) Cuando el estudio se trata de variedades diferenciables con puntos singulares.

En el caso a) he extendido la definición de González Domínguez usando la fórmula de cambio de variable de Leray, de tal manera que por cambio de variable no hay dificultad en darle sentido a productos de la delta de Dirac soportada en dichas variedades.

En el caso b) usamos dos métodos:

1) El método de prolongación analítica y agregamos condiciones muy fuertes de regularidad a la familia objeto de estudio, y
2) El otro método consiste en usar libremente el desarrollo en serie de Laurent.

Con estos métodos he logrado darle sentido a productos de distribuciones tales como:

$$H\left(u\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)\cdot\delta\left(u\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)$$

Publicado en *Thai Journal of Mathematics*, Vol. 1, 2003, Nº 2, pp. 25-36. Donde $H(u)$ es la función de Heaviside definida sobre la variedad $u\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in C^{\infty}(R)$ sin puntos singulares.

$$\delta^{(k-1)}\left(P(x)\right)\cdot\delta^{(s-1)}\left(P(x)\right)=A_{k,s}\delta^{(k+s-1)}\left(P(x)\right)$$

Publicado en *Far East Journal of Mathematical Sciences* (FJMS), Special Volume, 2001, pp. 155-169. Donde:

$P(x)=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2$ y la hipersuperficie $P(x)=0$ es un hipercono con un punto singular (el vértice) en el origen.

$$\delta^{(k-1)}\left(m^2+P(x)\right)\cdot\delta^{(s-1)}\left(m^2+P(x)\right)=C_{k,s}\delta^{(k+s-1)}\left(m^2+P(x)\right)$$

Publicado en *Far East Journal of Mathematical Sciences* (FJMS), Special Volume, 2001, pp. 155-169. Donde:

$$m^2+P(x)=m^2+x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2$$

$$\delta^{(k-1)}\left(G(x,m)\right)\cdot\delta^{(s-1)}\left(G(x,m)\right)=B_{k,s}\delta^{(k+s-1)}\left(G(x,m)\right)$$

Publicado en *Integral Transform and Special Functions*, Vol. 18, Nº 2, 2007, pp. 77-86. Donde:

$G(x,m)=\left(x_1^2+\ldots+x_p^2\right)^m-\left(x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2\right)^m$ es una generalización de la forma cuadrática $P(x)=x_1^2+\ldots+x_p^2-\left(x_{p+1}^2+\ldots+x_{p+q}^2\right)$

e) ¿Dónde aparecen en Matemática algunas situaciones vinculadas con productos de distribuciones?

Analicemos en primer lugar el producto $H(x)\cdot\delta(x)$ donde $H(x)$ es la función de Heaviside que vale *1* si *x>0* y vale *0* si *x<0*.

Este producto es histórico y ha sido objeto de estudio de muchos matemáticos, entre ellos Alberto González Domínguez quien en un trabajo con Roque Scarfiello obtienen la fórmula:

$$H(x)\cdot\delta(x)=\frac{1}{2}\delta(x)$$

Esta fórmula permite, por ejemplo, resolver en el sentido distribucional el problema de valores iniciales de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}y(t)=\delta(t)y(t)$$
$$y(-\infty)=1$$

Por otra parte esta fórmula tiene una relación con la siguiente situación: Si se tienen dos distribuciones arbitrarias para las cuales $S.T$ exista, $S.T'$ exista y $S'.T$ exista, la propiedad: $(S.T)'=S.T'+T.S'$ no es válida en general.

Con el Dr. Chenkuan Li de la Universidad de Brandon, Canadá, hemos formalizado un ejemplo que afirma que tal propiedad no es válida.

Sin embargo, usando la fórmula $H(x)\cdot\delta(x)=\frac{1}{2}\delta(x)$,

el producto $x_+^r\cdot\delta^{(l)}(x)=\begin{cases} A_{r,l}\delta^{(l-r)}(x) \text{ si } (l-r)\geq 0 \\ 0 \text{ si } (l-r)<0 \end{cases}$

donde $A_{r,l}=\frac{1}{2}\frac{(-1)^r\, l!}{(l-r)!}$

y considerando que, $H'(x)=\delta(x)$ es posible analizar la validez de la propiedad:

$(H(x)\cdot\delta(x))'=H(x)\cdot\delta'(x)+\delta(x)\cdot H'(x)$, la cual se cumpliría si y sólo sí $\delta(x)\cdot\delta(x)=0$.

Pero resulta que hay varias versiones o puntos de vista acerca del producto $\delta(x)\cdot\delta(x)$.

Veamos una de esas versiones.

II. El cuadrado de la delta de Dirac

A partir del trabajo presentado por Laurent Schwartz sobre la imposibilidad de multiplicar dos distribuciones arbitrarias de tal manera que dicho producto sea compatible con la estructura de los números reales, surgen muchas formas de definir el producto de dos distribuciones.

Dentro de este esquema aparece un trabajo de J. Mikusiñski denominado el cuadrado de la delta de Dirac, publicado en *Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astr. Phys.* N° 14, 1966, pp. 511-513, donde definiendo la delta de Dirac por medio de una sucesión y vía la convolución obtiene este producto.

A partir de ese trabajo se han presentado otros relacionados con este producto, pero en la mayoría de los casos dicho producto da como resultado cero, es decir: $(\delta(x))^2 = \delta(x)\cdot\delta(x) = 0.$

Este resultado aparece demostrado, entre otros, por S. E. Trione y también por Chenkuan Li.

En los estudios que he realizado he logrado darle sentido a este producto encontrando que dicho producto existe y su valor es distinto de cero.

El resultado que se obtiene es el siguiente:

$$(\delta(x))^2 = \delta(x)\cdot\delta(x) = 4\pi\delta\,'(x)$$

Para darle sentido a este producto usamos el Núcleo de Riemann-Liouville definido por:

$$Z_\alpha(x) = \frac{x_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\text{, donde } x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Se demuestra que $Z_\alpha(x)$ en el sentido distribucional converge a $\delta^{(m)}(x)$ cuando α tiende a $-m, m = 0, 1, 2, \ldots$

Usando la transformada de Fourier del Núcleo de Riemann-Liouville:

$F\{Z_\lambda(x)\} = ie^{\lambda\pi i/2}(\sigma + i0)^{-\lambda-1}$ donde λ es un número complejo,

$(x+i0)^\lambda = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(x+i\varepsilon)^\lambda$, propiedades de convolución tales como

$$(x+i0)^\lambda * (x+i0)^\mu$$

$$(x-i0)^\lambda * (x-i0)^\mu,$$

la definición de producto:

$$\delta^{(k-1)}(x)\cdot\delta^{(l-1)}(x) = F^{-1}\left\{F\left\{\delta^{(k-1)}(x)\right\} * F\left\{\delta^{(l-1)}(x)\right\}\right\}$$

la cual es correcta y está formalizada en el libro de Laurent Schwartz para todo par de distribuciones temperadas, tomando en cuenta que

a) $\lim\limits_{\alpha \to -m} Z_\alpha(x) = \delta^{(m)}(x)$

b) $F\{Z_\alpha(x)\} = ie^{\lambda\pi i/2}(\sigma + i0)^{-\lambda-1}$

c) $F\{\delta^{(k-1)}(x)\} = ie^{-k\pi i/2}(\sigma + i0)^{k-1}$

d) $(x+i0)^\lambda * (x+i0)^\mu = a_{\lambda,\mu}(x+i0)^{\lambda+\mu}$

e) $(x-i0)^\lambda * (x-i0)^\mu = b_{\lambda,\mu}(x-i0)^{\lambda+\mu}$

y manteniendo la operación de límite para el final, se obtiene:

$$\delta^{(k-1)}(x)\cdot\delta^{(t-1)}(x) = F^{-1}\{F\{\delta^{(k-1)}(x)\} * F\{\delta^{(t-1)}(x)\}\} = i.i.e^{(-k-t)\pi i/2}\left(\frac{-2\pi i\Gamma(k+t+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(t+1)}\right)$$

$$F^{-1}\{(x+i0)^{k+t-1}\} = \frac{2\pi\,(k+t)!}{k!t!}$$

$$F^{-1}\{F\{\delta^{(k+t-1)}(x)\}\} = \frac{2\pi\,(k+t)!}{k!t!}\cdot\delta^{(k+t-1)}(x)$$

Consecuentemente para $k=t=1$ se obtiene:

$$(\delta(x))^2 = \delta(x)\cdot\delta(x) = 4\pi\delta'(x).$$

Este resultado ha sido publicado en *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Bulgaria, Vol. 53, Nº 2, 2009, pp. 163-174.

También he obtenido extensiones del producto $\delta.\ \delta$ al caso n-dimensional, es decir trabajando con n variables, se obtiene que:

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)\cdot\delta(x_1,\ldots,x_n) = CL^{\frac{n}{2}}\delta(x_1,\ldots,x_n) \text{ para } n \text{ par}$$

Donde L^k es el operador ultrahiperbólico iterado k-veces:

$$L^k = \left\{\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) - \left(\sum_{i=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\right\}^k \quad \text{y}$$

$$C = \frac{\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right)^2}{2^{n+1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}(n-1)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot\frac{1}{\left[\Psi\left(\frac{p}{2}\right)-\Psi\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2}$$

Observe en este producto que:

$$\delta\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in S'$$

$$\delta\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in S'$$

y el producto distribucional

$$\delta\left(x_1,\ldots,x_n\right)\cdot\delta\left(x_1,\ldots,x_n\right)=CL^{\frac{n}{2}}\delta\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in S'$$

III. Un modelo matemático vinculado a productos de distribuciones

El Modelo Predador Presa con Migración de Yoshikawa-Yamaguti y de H. Hasimoto publicado en *Procceding Japan Academic* 50, 1974, es un modelo que se expresa por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales semi-lineales del tipo:

$$\left(\partial_t+\partial_x\right)u\left(x,t\right)=u\left(x,t\right)\cdot v\left(x,t\right)$$

$$\left(\partial_t-\partial_x\right)v\left(x,t\right)=-u\left(x,t\right)\cdot v\left(x,t\right)$$

El cual describe la densidad de dos especies en movimiento a lo largo del eje x con velocidades ± 1 y que tienen una velocidad de crecimiento proporcional a su producto.

Supongamos que inicialmente las poblaciones están concentradas en los puntos $x = -1$ y $x = +1$ respectivamente, esto es:

$$u\left(x,0\right)=\delta\left(x+1\right),$$

$$v\left(x,0\right)=\delta\left(x-1\right)$$

Para tiempos pequeños, no ocurre interacción, y las poblaciones deben migrar con sus respectivas velocidades:

$$u\left(x,t\right)=\delta\left(x-t+1\right),$$

$$v\left(x,t\right)=\delta\left(x+t-1\right)$$

Sin embargo, en el tiempo $t = 1$ las dos poblaciones se encuentran.

Matemáticamente esto da lugar al producto de dos distribuciones:

$$\delta\left(x-t+1\right)\cdot\delta\left(x+t-1\right)$$

Por ejemplo, si consideramos ahora el siguiente modelo:

$$\left(\partial_t+\partial_x\right)u\left(x,t\right)=0$$

$$\left(\partial_t-\partial_x\right)v\left(x,t\right)=0$$

$$u\left(x,0\right)=\delta\left(x+1\right)$$

$v(x,0)=\delta\,(x-1)$

$\partial_t w(x,t)=u(x,t)\cdot v(x,t)$

$w(x,0)=0$

La solución de este modelo sería:

$u(x,t)=\delta\,(x-t+1)$,

$v(x,t)=\delta\,(x+t-1)$ y

$w(x,t)=\frac{1}{2}\delta\,(x)\otimes H\,(t-1)$

Donde $\otimes$ significa producto directo o producto tensorial.

Podemos observar que:

$$\partial_t w(x,t)=\frac{1}{2}\delta\,(x)\otimes\delta\,(t-1)=\frac{1}{2}\delta\,(x,t-1)=\frac{1}{2}\delta\,(x-t+1)\cdot\delta\,(x+t-1)$$

Es claro que $u\,(x,t)$ y $v\,(x,t)$ resuelven el sistema dado, pero también podemos observar que el producto de distribuciones $\delta\,(x-t+1)\cdot\delta\,(x+t-1)$ una vez definido verifica la condición $u(x,t)\cdot v(x,t)$ del sistema planteado.

He logrado formalizar este producto $\delta\,(x-t+1)\cdot\delta\,(x+t-1)$ y extenderlo a mayores dimensiones.

IV. Nuevos resultados relacionados con soluciones elementales y fórmulas de iteración

Finalmente quiero indicar que he encontrado una sucesión E_k de familias de soluciones elementales del operador ultrahiperbólico iterado k-veces

$L^k=\left\{\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)-\left(\sum_{i=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\right\}^k$, donde $p+q=n$ es la dimensión del espacio, la cual permite resolver ecuaciones en derivadas parciales del tipo $L^k\mu\,(x_1\ldots x_n)=f\,(x_1\ldots x_n)$.

Además, he encontrado una fórmula de iteración para la derivada de la delta de Dirac soportada sobre una variedad sin puntos singulares.

$\delta^{(k-1)}\left(u\left(x_1,\ldots,x_n\right)^m\right)=A_{k,m}\delta^{(mk-1)}\left(u\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)$ para $u(x_1,\ldots,x_n)$ sin punto singular. Donde $A_{k,m}=\dfrac{\left(-1\right)^{mk-1}\left(k-1\right)!}{m\left(mk-1\right)!\left(-1\right)^{k-1}}$, comunicada en la Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina en el año 2010.

Se espera obtener algunas consecuencias relacionadas con productos de distribuciones usando esta fórmula de iteración.

Impreso en el mes de septiembre de 2011 en *Ronaldo J. Pellegrini Impresiones*,
Bogotá 3066, Depto. 2, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina

correo-e: pellegrinirj@gmail.com