PUNTOS FIJOS EN ESPACIOS NUCLEARES

Comunicación efectuada
por el Académico Titular Dr. Julio H. G. Olivera
en la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires,
sesión plenaria del 19 de diciembre de 2011

PUNTOS FIJOS EN ESPACIOS NUCLEARES

Dr. JULIO H. G. OLIVERA

Resumen

La proposición principal contenida en esta nota es la siguiente: Todo subconjunto acotado maximal de un espacio nuclear cuasicompleto tiene la propiedad de punto fijo. El teorema vale para los espacios clásicos de distribuciones y los espacios conucleares de funciones de prueba.

Abstract. Fixed points in nuclear spaces

The main proposition contained in this note is the following: Every maximal bounded subset of a quasi-complete nuclear space has the fixed point property. The theorem applies to the classic spaces of distributions and the co-nuclear spaces of testing functions.

Introducción

Recordemos la noción de punto fijo. Dada una transformación F: E$\rightarrow$ E, se dice que F posee un punto fijo si existe un elemento $x \in E$ tal que $F(x) = x$.

Si E designa un espacio topológico, se dice que $S \subset E$ tiene la propiedad de punto fijo si toda transformación continua T de S en S posee un punto fijo. La continuidad se refiere aquí a la topología inducida por E.

En [3] se formula y verifica la siguiente proposición:

Todo conjunto acotado maximal de distribuciones tiene la propiedad de punto fijo.

La presente nota ofrece una extensión general de ese resultado a los espacios nucleares cuasicompletos.

Proposiciones

La clave de la extensión contemplada es el siguiente hecho topológico.

LEMA. Todo subconjunto acotado de un espacio nuclear cuasicompleto es completamente separable.

En efecto, sean N un espacio nuclear cuasicompleto; B, una parte acotada de N; K, la clausura de B. El conjunto K es compacto. Por el teorema de Komura [2], N es topológicamente isomorfo a un subespacio de s^A, producto de A copias del espacio s de sucesiones rápidamente decrecientes. Puesto que s es un espacio de Fréchet, la proyección de K en s^i ($i \in A$) es un conjunto compacto metrizable, dotado por consiguiente de una base numerable. Por tanto el conjunto K tiene una base numerable, atributo que induce en B.

TEOREMA. Todo subconjunto acotado maximal de un espacio nuclear cuasicompleto tiene la propiedad de punto fijo.

La demostración surge de las consideraciones siguientes. Hemos visto que el conjunto compacto K posee una base numerable. Esto implica que es homeomorfo a un subconjunto del "cubo unidad" o "cubo de Hilbert". Existe así, en virtud del lema de Zorn, un conjunto acotado maximal M tal que $K \subset M$. El conjunto maximal M es homeomorfo al cubo de Hilbert, que tiene la propiedad de punto fijo.

Observaciones

I) El teorema incluye en su ámbito de aplicación los espacios fundamentales de la teoría de las distribuciones: tanto los espacios de funciones de prueba D, E y S como los de funciones generalizadas D′, E′ y S′. Todos ellos son espacios nucleares y completos ([4]), "a fortiori" cuasicompletos.

II) Por su relación con la propiedad de Heine-Borel, el teorema no incluye los espacios normados de dimensión infinita.

III) Respecto de los espacios de Hardy $H^p(R^n)$, (v. [1] 6.4), el teorema es aplicable si $p \in (0,1]$ pero no lo es si $p > 1$.

Referencias

[1] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, N. York, 2009.

[2] T. Komura, Y. Komura, Ueber die Einbettung der nuklearen Raeume in (s^A), *Math. Ann.* 162 (1966), 284-288.

[3] J. H. G. Olivera, *Puntos fijos en espacios de distribuciones*, Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, 2011.

[4] F. Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, San Diego, 1967.