TOPOLOGÍAS INTRÍNSECAS EN UNA GEOMETRÍA LINEAL DENSA, EXTENSIBLE Y COMPLETA

Comunicación efectuada por el Dr. Juan Carlos Bressan
en la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires
en la sesión privada extraordinaria del 10 de octubre de 2008

Resumen

Este trabajo es continuación de los que expusiera a esta Academia en 2006 y 2007. Aquí, redefinimos la topología localmente convexa utilizada en las comunicaciones anteriores a partir de una topología definida por los conjuntos cuyos puntos son internales, y establecemos las diferencias y similitudes entre ambas topologías.

Abstract

This paper is a continuation of those I exposed at this Academia in 2006 and 2007. In this paper, I redefine local convexity topology of those papers, using another topology definite by invariance core sets, and establishing differences and similitudes from both them.

AMS (1991): Mathematics subject classification 52A01

1.- Introducción y definiciones básicas

Puesto que este trabajo es una continuación de [1] y [2], daremos las definiciones que utilizaremos con las notaciones allí introducidas. Simbolizaremos con "$x\cup$S" a "$\{x\}\cup$S"; con "S$\setminus x$", a "S$\setminus\{x\}$", donde "\" es la diferencia de conjuntos. Asimismo denotaremos con "A´" el complementario de A, es decir, A´= X\A. Además, "si y solo si" se escribirá "sii". Omitiremos enunciar diversos resultados de [1] y [2], remitiendo al lector a dichos trabajos cada vez que sean utilizados. Sean X $\neq \varnothing$ y $\mathcal{S}$: $X^2 \to \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{S}(a; b) = [a,b]$ una función donde $[a,b]$ se llamará *segmento cerrado* a, b. Si $a \neq b$, los segmentos $[a,b) = [a,b] \setminus b$ y $(a,b] = [a,b] \setminus a$ son semicerrados y $(a,b) = [a,b] \setminus \{a,b\}$ es abierto. Diremos que C$\subseteq$X es *convexo*, o que C$\in\mathcal{C}$, sii œ$\{a,b\} \subseteq$ C, $[a,b] \subseteq$ C. Una *geometría lineal densa, extensible y completa* es un par (X, $\mathcal{S}$) que cumple los siguientes axiomas:

(L1) $\{a,b\} \subseteq [a,b] = [b,a] \ \wedge\ [a,a] \subseteq \{a\}$.

(L2) $\{ b \in [a,c] \ \wedge\ c \in [b,d] \ \wedge\ b \neq c \} \ \Rightarrow\ b \in [a,d]$.

(L3) $\{ c \notin [a,b] \ \wedge\ b \notin [a,c] \} \ \Rightarrow\ [a,b]\cap[a,c] = \{a\}$.

(L4) $c \in [a,b] \ \Rightarrow\ [a,b] = [a,c]\cup[c,b]$.

(C) $\{ c \in [a,b_1] \ \wedge\ d \in [c,b_2] \} \ \Rightarrow\ \exists b \in [b_1,b_2],\ d \in [a,b]$.

(D) $a \neq b \Rightarrow \exists\, x \notin \{a,b\},\, x \in [a,b]$.
(U) $a \neq b \Rightarrow \exists\, c \notin \{a,b\},\, a \in [c,b]$.
(S) $[\, a\neq b \wedge a\in C \in \mathcal{C}\,] \Rightarrow \exists c\in[a,b], \{ C\cap[a,b] = [a,c] \vee C\cap[a,b] = [a,c) \}$.
Los siete primeros axiomas caracterizan las geometrías lineales densas y extensibles, mientras que el último es el *axioma de completitud*. La designación de los axiomas así como la notación para segmentos, rectas y semirrectas es la utilizada por Coppel [4].
Si $a \neq b$, $<a,b> = \{ x : x\in[a,b] \vee a\in[x,b] \vee b\in[a,x] \}$ es una *recta*. Las semirrectas son $[a,b> = \{ x : x\in[a,b] \vee b\in[a,x] \}$, $(a,b> = [a,b> \setminus a$, $<a,b] = \{ x : x\in[a,b] \vee a\in[x,b] \}$ y $<a,b) = <a,b] \setminus b$. Si $B\subseteq X$ y $B\setminus a \neq \emptyset$, el *cono de vértice a generado por* B es $[a,B> = \cup \{ [a,b>: b \in B\setminus a \}$. Si $A,B\subseteq X$ y $A\neq\emptyset\neq B$, el *join* de A,B es el conjunto $J(A,B) = \cup \{ [a,b]: a\in A \wedge b\in B \}$. Si $A,B\in\mathcal{C}$ y $A\neq\emptyset\neq B$, entonces $J(A,B)\in\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es interseccional, la *cápsula convexa* de $S\subseteq X$, será conv $S = \cap \{C\in\mathcal{C} : S\subseteq C\}$. Si $S\subseteq X$ es no vacío y finito entonces diremos que P = conv S es un *polítopo*. Además, definimos el *mirador* de $S\subseteq X$, mediante mir $S = \{ x\in S$: œ$y\in S$, $[x,y]\subseteq S \}$. Así, S es convexo sii mir S = S. Por otra parte, si mir $S \neq \emptyset$, diremos que S es *estrellado*. De los axiomas (L1) y (C) se deduce que el espacio es de **JD**-convexidad T_1 y en consecuencia de T-convexidad (ver [3]), es decir, œ$S\subseteq X$, mir S es igual a la intersección de la familia de las componentes convexas de S, o sea, de los convexos maximales incluidos en S.
En este trabajo utilizaremos la topología $\mathcal{L}$ y la $\mathcal{I}$, ya estudiada en [1] y [2]. Con $\mathcal{L}$ y con $\mathcal{I}$ denotaremos, respectivamente, las familias de los conjuntos abiertos, mientras que con $\mathcal{L}_c$ y con $\mathcal{I}_c$ las familias de los cerrados. En los operadores de cada topología, deberemos indicar cuál es la topología considerada.

2.- Topología lineal $\mathcal{L}$

Sea $S\subseteq X$, $x\in S$ es *punto internal* de S, y escribiremos $x\in$ *inter* S, sii œ$y\in X\setminus x$, $\exists z\in(x,y)$, $[x,z]\subseteq S$.
Proposición 2.1. $x\in$ *inter* S $\Leftrightarrow \exists S_x\subseteq S$, $[x\in \text{mir } S_x \wedge [x,S_x> = X]$.
Ejemplo 2.2. El operador internal no es idempotente. En efecto, sea $S = \{ (x;y)\in R^2: x^2+y^2 \leq 1 \} \setminus \{ (x;y)\in R^2: x>0 \wedge y>0 \wedge (x-1)^2+y^2 > 1 \}$. En este caso, $(0;0)\in$ *inter* S, pero $(0;0)\notin$ *inter*(*inter* S).
Teorema 2.3. $\mathcal{L} = \{ S \subseteq X$: *inter* $S = S \} \Rightarrow (X,\mathcal{L})$ es espacio topológico.
Demostración. Evidentemente, $\emptyset\in\mathcal{L}$ y $X\in\mathcal{L}$. Sean $\{ A_i : i\in I \}\subseteq\mathcal{L}$ y $A = \cup\{ A_i : i\in I \}$. Así, por 3.1 [1], œ$i\in I$, A_i = *inter* $A_i \subseteq$ *inter* A. Luego,

$A \subseteq$ *inter* A, pero como *inter* $A \subseteq A$, resulta *inter* A = A y $A \in \mathcal{L}$. Sean $\{ B_i : 1 \le i \le n \} \subseteq \mathcal{L}$ y $B = \cap\{ B_i : 1 \le i \le n \}$. En consecuencia, por 3.2 [1], *inter* $B = \cap\{$ *inter* $B_i : 1 \le i \le n \} = \cap\{ B_i : 1 \le i \le n \} = B$. Luego, *inter* B = B y $B \in \mathcal{L}$. Consecuentemente, $(X,\mathcal{L})$ es un espacio topológico.
En $(X,\mathcal{L})$, $\mathcal{L}$ es la *topología lineal* y $S \subseteq X$ es $\mathcal{L}$ *–abierto* sii $S \in \mathcal{L}$. Diremos que U es $\mathcal{L}$ *–entorno* de $x \in X$, o que $U \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}(x)$, sii $x \in U \in \mathcal{L}$.
Ejemplo 2.4. $(X,\mathcal{L})$ no es localmente convexo. En efecto, sea
$S = \{ (x; y) \in R^2 : x^2+y^2 < 1 \} \setminus \{ (x; y) \in R^2 : x>0 \wedge y>0 \wedge (x-1)^2+y^2 = 1 \}$.
De esta forma $S \in \mathcal{L}$; sin embargo para $p = (0; 0) \in S$, no existe $U \subseteq S$ tal que $U \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}(p)$ y sea convexo.
Si $S \subseteq X$, el $\mathcal{L}$ *–interior* de S es $\mathcal{L}$–int $S = \{ x \in S : \exists U \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}(x), U \subseteq S \}$. Evidentemente, $\mathcal{L}$–int $S = \cup\{ A \in \mathcal{L} : A \subseteq S \}$. Diremos que C es un $\mathcal{L}$–*cuerpo convexo* sii C es convexo con $\mathcal{L}$–int $C \neq \emptyset$. Las dos siguientes proposiciones resultan respectivamente de 3.5 y 3.4 [1].
Proposición 2.5. $C \in \mathcal{C} \Rightarrow$ *inter* C = $\mathcal{L}$–int $C \in \mathcal{C}$.
Proposición 2.6. $(p \in C \in \mathcal{C} \wedge x \in \mathcal{L}\text{–int } C) \Rightarrow (p,x] \subseteq \mathcal{L}\text{–int } C$.
Proposición 2.7. Sean $S \subseteq X$ estrellado tal que $\mathcal{L}$–int(mir S) $\neq \emptyset$, y $S_1 = \mathcal{L}$–int S. Entonces S_1 es estrellado y $\mathcal{L}$–int(mir S) $\subseteq$ mir S_1.
Demostración. Sean $S \subseteq X$, $x \in \mathcal{L}$–int(mir S) y $p \in S_1$. Por la T-convexidad existe C componente convexa de S tal que $x, p \in C$. Puesto que mir $S \subseteq C$, $x \in \mathcal{L}$–int C y como $p \in C$, por 2.6 $(p,x] \subseteq \mathcal{L}\text{–int } C \subseteq S_1$. Pero $p \in S_1$ y en consecuencia, $[p,x] \subseteq S_1$, S_1 es estrellado y $x \in$ mir S_1.

3.- Topología localmente convexa $\mathcal{J}$

La topología $\mathcal{L}$ nos permite expresar algunas definiciones dadas en [1] en función de la topología lineal. En efecto, la definición de entorno convexo dada en [1] ahora puede expresarse de la siguiente forma: Diremos que U es *entorno convexo* de $x \in X$, o que $U \in \mathcal{V}_{\mathcal{J}}(x)$, sii $x \in U \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$.
Según vimos en [1] decimos que un conjunto $S \subseteq X$ es $\mathcal{J}$–abierto sii œ$x \in S$, $\exists U \in \mathcal{V}_{\mathcal{J}}(x)$, $U \subseteq S$. De esta forma, $(X,\mathcal{J})$ es un espacio topológico localmente convexo.
Resulta oportuno destacar que esta topología es la *core-topology* definida en los BW-espacios (o espacios de Bryant y Webster) como puede verse en III.5.4 [5]. Si analizamos la definición de los BW-espacios, vemos que efectuando las correspondientes equivalencias a nuestro sistema axiomático, un BW-espacio es un par $(X, \mathcal{S})$ que cumple los axiomas (L1)-(L4), (C) y (D). De esta forma, en virtud de III.5.8 [5] resulta el teorema siguiente.

Teorema 3.1. Si (X, $\mathcal{S}$) es una geometría lineal densa, extensible y completa, entonces (X, $\mathcal{T}$) es un espacio topológico de Hausdorff, localmente convexo, tal que todo polítopo es $\mathcal{T}$–compacto.

Este resultado, es sumamente importante para nuestro trabajo ya que al ser (X, $\mathcal{T}$) un espacio de Hausdorff cumple:

$$\text{œ}x\in X,\ \text{œ}y\in X,\ [\ x \neq y \ \Rightarrow\ \exists U\in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x),\ \exists V\in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(y),\ U\cap V = \varnothing\ ].$$

que es el Corolario 5.1 de [1], del cual se deduce inmediatamente el primer axioma topológico (Ax 1) $\text{œ}x\in X,\ \cap\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) = \{\, x\, \}$. Cabe destacar que para demostrar en III.5.8 [5] que el espacio es de Hausdorff, se construye un hiperplano cerrado que deje a los puntos x, y de distinto lado, para lo cual se utiliza la completitud (S) que fue introducida en [2]. Por otra parte, los polítopos son conjuntos $\mathcal{T}$–cerrados por ser $\mathcal{T}$–compactos. Así, por la definición dada en [5], la terna (X, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{C}$) es un espacio de convexidad topológico.

Evidentemente, para obtener resultados análogos a los de la convexidad en espacios vectoriales topológicos, lo más conveniente va a ser trabajar con la topología localmente convexa $\mathcal{T}$ agregando únicamente los axiomas topológicos (Ax 2) y (Ax 3), puesto que (Ax 1) se obtiene como consecuencia de ser un espacio de Hausdorff. Dichos axiomas expresan en una forma más débil propiedades de las homotecias en espacios vectoriales topológicos. En este trabajo reemplazaremos (Ax 2) y (Ax 3) por un único axioma del cual se deduce (Ax 2) y se obtiene como corolario (Ax 3). Este nuevo axioma se llamará *homotético-topológico* y se notará con (HT).

(HT) Sean x, y, p tres puntos distintos de una recta, y sea $U\in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ tal que $U\cap \{y, p\} = \varnothing$. Entonces existen $V\in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(y)$ y una función biyectiva f:U→V, tal que $f(x) = y$; además si $f(x_1) = y_1$, entonces x_1, y_1, p son también tres puntos distintos de una recta igualmente ordenados que x, y, p.

A diferencia de (Ax 2), en este axioma no se indica ningún orden de los puntos x, y, p. De esta forma, al afirmar que los puntos x_1, y_1, p se encuentran igualmente ordenados que x, y, p pueden darse los siguientes casos mutuamente excluyentes:

(1) $x\in(y,p) \Rightarrow x_1\in(y_1,p)$. (2) $y\in(x,p) \Rightarrow y_1\in(x_1,p)$. (3) $p\in(x,y) \Rightarrow p\in(x_1, y_1)$.

Los casos (1) y (2) permiten probar (Ax 2), mientras que de (3) se obtiene (Ax 3) afirmando además que entre los dos entornos existe una función biyectiva, lo cual no se deducía de dicho axioma. En efecto, teniendo en cuenta el enunciado de (Ax 3) obtenemos:

Proposición 3.2. La siguiente condición es equivalente a (Ax 3):

$[y\in(x,z) \wedge y\notin U\in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)] \Rightarrow [\exists W\in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(z),\ \text{œ}z_1\in W,\ \exists x_1\in U,\ y\in(x_1,z_1)]$.

Puesto que (Ax 2) y (Ax 3) se obtiene de (HT), todos los resultados probados en la topología $\mathcal{J}$ con los axiomas topológicos seguirán siendo válidos en dicha topología con el axioma (HT).
En la topología localmente convexa $\mathcal{J}$ con el axioma (HT), por 5.4 [1], si C es convexo entonces $\mathcal{J}$–cl C es convexo. De esta forma, 3.3 y 3.4 son consecuencias de este resultado y de la T-convexidad.
Proposición 3.3. œ$S \subseteq X$,[S es $\mathcal{J}$–cerrado $\Rightarrow$ mir S es $\mathcal{J}$–cerrado].
Demostración. Si C es una componente convexa de S, entonces $C \subseteq \mathcal{J}$ –cl $C \subseteq \mathcal{J}$ –cl S = S. Pero por 5.4 [1], $\mathcal{J}$ –cl C es convexo y en consecuencia por la maximalidad de C es C = $\mathcal{J}$ –cl C. Luego, mir S es $\mathcal{J}$ –cerrado por ser intersección de componentes convexas $\mathcal{J}$ –cerradas.
Corolario 3.4. œ$S \subseteq X$, [S es $\mathcal{J}$ –compacto $\Rightarrow$ mir S es $\mathcal{J}$ –compacto].
Demostración. Si S es $\mathcal{J}$ –compacto, es $\mathcal{J}$ –cerrado. Luego, por 3.3 mir S es $\mathcal{J}$ –cerrado y como mir $S \subseteq S$, resulta $\mathcal{J}$ –compacto.
En un espacio vectorial normado, un conjunto es acotado y finito-dimensional, si y sólo si está incluido en un polítopo. De esta forma, este concepto puede expresarse en nuestro contexto axiomático. Puesto que los polítopos son $\mathcal{J}$ –compactos obtenemos el corolario siguiente.
Corolario 3.5. Si $S \subseteq P$, donde P es un polítopo y S es $\mathcal{J}$ –cerrado, entonces S y mir S son $\mathcal{J}$ –compactos.
La siguiente proposición es análoga a la 2.7 válida para la topología $\mathcal{L}$.
Proposición 3.6. Sean $S \subseteq X$ estrellado tal que $\mathcal{J}$–int(mir S) $\neq \emptyset$, y $S_1 = \mathcal{J}$–int S. Entonces S_1 es estrellado y $\mathcal{J}$–int(mir S) $\subseteq$ mir S_1.

4.- Algunas relaciones entre las dos topologías

De algunos resultados válidos para la topología localmente convexa $\mathcal{J}$ que se obtengan sin utilizar el axioma (HT) o los axiomas topológicos dados en [1] se pueden deducir propiedades de $\mathcal{L}$. En efecto, como $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}$, entonces (X, $\mathcal{L}$) es un espacio de Hausdorff. Por otra parte, $\mathcal{J}_c \subseteq \mathcal{L}_c$, y en consecuencia, los polítopos son conjuntos $\mathcal{L}$ –cerrados, es decir, cerrados en la topología $\mathcal{L}$. De esta forma, (X, $\mathcal{L}_c$, $\mathcal{C}$) es también un espacio de convexidad topológico. Resulta inmediato que, si $S \subseteq X$, entonces $\mathcal{J}$ –int S $\subseteq \mathcal{L}$ –int S $\subseteq$ *inter* S y $\mathcal{L}$ –cl S $\subseteq \mathcal{J}$ –cl S. Además, si $C \in \mathcal{C}$, *inter* C = $\mathcal{L}$ –int C = $\mathcal{J}$ –int C. A diferencia de lo que ocurre en los espacios de convexidad topológicos en donde la única condición de compatibilidad que se pide para su topología es que los polítopos sean conjuntos cerrados, en este caso ambas topologías son intrínsecas a la estructura de convexidad.

5. Conclusiones

Evidentemente, la $\mathcal{J}$–topología con el axioma (HT) permite desarrollar una teoría análoga a la de los espacios vectoriales topológicos con todas las limitaciones ya citadas en [2]. Sin embargo, resulta de interés estudiar la $\mathcal{L}$–topología no solamente como generadora de la $\mathcal{J}$–topología sino para ver qué propiedades subsisten en ella.

Referencias

[1] J. C. Bressan, "Axiomas topológicos en una geometría lineal densa y extensible", *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, T. XL (2006), 231-238.

[2] J. C. Bressan, "Axiomas topológicos y separación en una geometría lineal densa, extensible y completa", *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, T. XLI (1) (2007), 383-391.

[3] J. C. Bressan y F. A. Toranzos, "Visibility cells and T-convexity spaces", *Compos. Math.* 83 (1992), 251-257.

[4] W. A. Coppel, *Foundations of Convex Geometry*, Cambridge University Press, 1998.

[5] M. Van de Vel, *Theory of convex structures*, North-Holland, Amsterdam, 1993.

Universidad de Buenos Aires
Departamento de Fisicomatemática
Facultad de Farmacia y Bioquímica
Junín 956 - (1113) CABA - Argentina
jbressan@mybfyb.ffyb.uba.ar
bressanjuancarlos22@gmail.com