

# **SOBRE LOS PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS DE LA DELTA DE DIRAC**

*Comunicación efectuada por la Dra. Susana Elena Trione  
en la sesión privada extraordinaria  
de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires  
el 7 de julio de 2008*



## Abstract

In this note we evaluate the multiplicative products of Dirac's delta by using sixteen different definitions of the  $\delta$  and by means of the approximation of the factors for distributional singular kernels of identical structure.

We observe that it can be shown that our expressions are closely related with the methods used by P. Antosik, A. González Domínguez, J. Mikusinski and R. Sikorski, among others.

We obtain the equations  $\delta^2 = 0$  and  $\delta^k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , and these conclusions are very useful for the applications, especially in the quantum-theory of fields.

We will only enunciate the statements and the conclusions whose proofs in detail appear in the books and articles of the Bibliography.

## Sumario

En esta nota evaluamos productos multiplicativos de la  $\delta$  de Dirac usando dieciséis diferentes definiciones de la  $\delta$  y mediante la aproximación de los factores por núcleos singulares distribucionales de idéntica estructura. Nuestras expresiones están íntimamente relacionadas con los métodos usados por P. Antosik, A. González Domínguez, J. Mikusinski y R. Sikorski, entre otros.

Obtenemos las ecuaciones  $\delta^2 = 0$  y  $\delta^k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$  y estas conclusiones son muy útiles para las aplicaciones, especialmente en la teoría cuántica de campos. Aquí solamente mencionamos los enunciados y las conclusiones cuyas demostraciones aparecen, detallada y explícitamente, en los libros y artículos de la Bibliografía.

## Sobre la $\delta^2$

### I. Definiciones

#### 1. "D"

$$D = C_0^\infty.$$

D es el espacio de las funciones complejas  $f(x)$  de  $n$  variables reales infinitamente derivables y de soporte compacto.

2. "D'"

D' = dual de D.

D' es el conjunto de funcionales lineales continuas definidas en D.

3. Distribución:

Es una funcional lineal continua definida en D.

4. Continuidad:

Una distribución es continua si cada sucesión  $\varphi_n(\vec{x}) \in D$  verifica:

(a)  $\varphi_n(\vec{x})$  tienen soportes en un mismo compacto fijo.

(b)  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$ , uniformemente.

(c)  $\varphi_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi^{(k)}$ , uniformemente,

$\varphi_n^{(k)}$  = derivada de orden k de  $\varphi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

5. Expresión de una distribución  $T(\vec{x})$ :

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} T(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (1)$$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $d\vec{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ,  $\varphi(\vec{x}) \in D$ .

## II. Definiciones de la $\delta$ de Dirac

En Física, la delta  $\delta$  de DIRAC (Paul Adrien Maurice Dirac, inglés, 1902 - 1984) se define de la siguiente manera:

Sea  $\delta(x)$  una función tal que verifica las siguientes condiciones:

1.  $\delta(x) = 0$  si  $x \neq 0$ ,

2.  $\delta(x) = \infty$  si  $x = 0$ , (2)

3.  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ .

La definición (2) es incorrecta, sin embargo, puede dársele un sentido correcto estricto apelando a la teoría de distribuciones. Otra forma incorrecta de presentar la  $\delta$  de Dirac es la siguiente:

Sean

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{v=1}^n x_v y_v,$$

$$\mathfrak{F}[f(\vec{x})] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} f(\vec{x}) d\vec{x} \text{ (transformada de Fourier de } f(\vec{x}) \text{)}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{F}^{-1}[f(\vec{x})] = \\
 & = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} f(\vec{x}) d\vec{x} \text{ (antitrans formada de Fourier de } f(\vec{x}) \text{)}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Escribamos

$$\begin{aligned}
 \langle \mathfrak{F}(\delta), \varphi \rangle &= \langle \delta, \mathfrak{F}(\varphi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \varphi(\vec{y}) d\vec{y} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\vec{y}) d\vec{y} = \langle 1, \varphi(\vec{y}) \rangle,
 \end{aligned}$$

o sea,

$$\mathfrak{F}(\delta) = 1, \quad (6)$$

y

$$\mathfrak{F}^{-1}(1) = \delta. \quad (7)$$

Formalmente,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} 1 d\vec{y} = \delta(\vec{x}). \quad (8)$$

Si  $n=1$ , tenemos

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dy. \quad (9)$$

La fórmula (9) es la representación espectral de la  $\delta$  de Dirac.

## 1. Primera definición de la $\delta$ (Gelfand)

Definimos:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \delta(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \rangle = \varphi(0). \quad (10)$$

Sea la función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Resulta

$$H'(x) = \varphi(0) = \delta(x).$$

La  $\delta$  así definida es un ejemplo de una distribución que no es una función. En efecto, se prueba que no existe ninguna función  $f(x)$  localmente integrable tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d\vec{x} = \varphi(0), \quad \forall \varphi(\vec{x}) \in C_0^\infty.$$

## 2. Segunda definición de la $\delta$ (Marcel Riesz)

Sea

$$R_\alpha = \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

donde

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

$$\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

y

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \text{ (función gamma).}$$

Se prueba que

$$R_\alpha(x)|_{\alpha=0} = \delta, \text{ y } R_\alpha(x)|_{\alpha=-n} = \delta^{(n)}.$$

## 3. Tercera definición de la $\delta$ (Alberto González Domínguez)

Partiendo de la fórmula clásica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} e^{-ixy} dx = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{4\lambda}};$$

González Domínguez prueba que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1-v}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{1-v}{v}\right)x^2} \right] = \delta. \quad (13)$$

La fórmula (13) demuestra una fórmula debida a Bogoliubov:

$$\delta = \varphi(0) = -\lim_{v^2} \frac{v^2}{\pi^4} \int_{\mathbb{R}^4} \sin(vp^2) \varphi(p) d^4 p. \quad (14)$$

## 4. Cuarta definición de la $\delta$ (Alberto González Domínguez)

La siguiente fórmula es válida:

$$\frac{\Omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} a^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n}{2}}(at) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \delta,$$

donde  $\Omega_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$  (área de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$ )

y

$$J_m(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\nu}}{\nu! \Gamma(m+\nu+1)} \quad (\text{función de Bessel 1ª especie}).$$

### 5. Quinta definición de la $\delta$ (Alberto González Domínguez y Marcel Riesz)

Sean

$$\vec{t} = (t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,$$

$$u = t_0^2 - t_1^2 - \dots - t_{n-1}^2,$$

$$\Gamma_+ = \left\{ \vec{t} \in \mathbb{R}^n / t_0 > 0, u > 0 \right\} \text{(interior del cono del futuro),}$$

$$\bar{\Gamma}_+ = \text{clausura de } \Gamma_+,$$

$$V_+ = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n / y_0 > 0, y_0^2 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2 \right\}$$

Llamaremos  $\mathfrak{R}$  (retardada) a la familia de funciones  $\phi(\vec{t})$  introducida por Marcel Riesz, que verifica:

1.  $\phi(\vec{t}) = F(u)$ ,
2. soporte  $\phi(\vec{t}) \subset \bar{\Gamma}_+$ ,
3.  $e^{i\langle \vec{t}, \vec{y} \rangle} \phi(\vec{t}) \in L_1$  (localmente integrable), si  $\vec{y} \in V_+$ .

Sea el núcleo de M. Riesz:

$$R_\alpha(u) = \begin{cases} \frac{u^{\frac{\alpha-n}{2}}}{H_n(\alpha)} & \text{si } t \in \Gamma_+, \\ 0 & \text{si } t \notin \Gamma_+, \end{cases}$$

$$\text{donde } H_n(\alpha) = \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-n+2}{2}\right).$$

Se prueba (A. González Domínguez y S. E. Trione) que el núcleo  $R_\alpha(u)$  verifica importantes propiedades. Nos interesa las dos más relevantes:

$$\text{i) } \diamond^k R_{2k}(u) = \delta, \quad (16)$$

donde

$$\diamond^k = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial t_{n-1}^2} \right\}^k, k = 1, 2, \dots$$

$\diamond^k$  es el operador n-dimensional ultrahiperbólico, iterado k veces y

$$\text{ii) } R_0(u) = \delta. \quad (17)$$

## 6. Sexta definición de la $\delta$ (A. González Domínguez y M. Riesz)

Consideremos la familia  $R$  introducida por Marcel Riesz:

$$W_\alpha(u, m) = \begin{cases} \frac{(m^{-2}u)^{\frac{\alpha-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{\frac{\alpha+n-2}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} J_{\frac{\alpha-n}{2}} \left[ (m^2u)^{\frac{1}{2}} \right] & \text{si } t \in \Gamma_+, \\ 0 & \text{si } t \notin \Gamma_+, \end{cases}$$

$\alpha$  es un parámetro complejo,  $m$  es un número real no negativo y  $n$  es la dimensión del espacio.  $W_\alpha(u, m)$  es una función ordinaria si  $\text{Re } \alpha \geq 1$ , si  $\text{Re } \alpha < n$  es una distribución. A. González Domínguez y S. E. Trione prueban, entre otras propiedades, que vale:

$$\text{i) } \{\diamond + m^2\} W_{2k}(u, m) = \delta, \quad (18)$$

donde

$$\{\diamond + m^2\}^k = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial t_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial t_{p+q}^2} - m^2 \right\}^k,$$

$k=1, 2, \dots$   $p+q=n$

$\{\diamond + m^2\}^k$  es el operador n-dimensional ultrahiperbólico de Klein-Gordon, iterado k veces.

$$\text{ii) } W_\alpha(u, m=0) = R_\alpha(u)$$

y

$$\text{iii) } W_0(u, m) = \delta. \quad (19)$$

## 7. Séptima definición de la $\delta$ (Alberto Pedro Calderón)

Sea el núcleo de A. P. Calderón (también dado por N. Aronszajn, K. T. Smith y L. Schwartz)

$$A = A_\alpha(|x|^2, m, n) = B(\alpha, m, n)(|x|^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} K_{\frac{n-\alpha}{2}} \left[ (m^2 |x|^2)^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, m > 0, n \text{ entero } \geq 2, \alpha \in \mathbb{C},$$

$$B(\alpha, m, n) = \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} 2^{1-\frac{\alpha}{2}} m^{\frac{n-\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\text{sen } \pi\nu} \text{ (función modificada de Bessel de 3ª especie),}$$

$\nu \neq \text{entero.}$

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)} = e^{-i\frac{\nu\pi}{2}} J_\nu\left(ze^{i\frac{\pi}{2}}\right) \text{ (función modificada de Bessel de 1ª especie).}$$

**A. P. Calderón prueba:**

$$1. \diamond^k A_{2k} = \delta, \quad (20)$$

$$2. A_0 = \delta. \quad (21)$$

## 8. Octava definición de la $\delta$ (S. E. Trione)

Sea  $G_\alpha(P \pm i0, m, n)$  la distribución causal (anticausal) dada por:

$$G_\alpha(P \pm i0, m, n) = H_\alpha(m, n) (P \pm i0)^{\frac{1-\alpha-n}{2}} K_{\frac{n-\alpha}{2}} \left[ (m^2 (P \pm i0))^{\frac{1}{2}} \right],$$

donde  $m$  es un real positivo,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $K_u$  designa la función modificada de Bessel de tercera especie,

$$H_\alpha(m, n) = \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} 2^{1-\frac{\alpha}{2}} e^{\pm i\frac{\pi}{2} q_i} (m^2)^{\frac{1-n-\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(P \pm i0)^\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P \pm i\varepsilon |x|^2)^\alpha \text{ (Gelfand),}$$

$$\varepsilon > 0, |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, \alpha \in \mathbb{C},$$

$$P = P(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2,$$

$p+q = n$  (dimensión del espacio). Las distribuciones  $(P \pm i0)^\alpha$  son analíticas en  $\alpha$  salvo en  $\alpha = -\frac{n}{2} - k, k = 0, 1, \dots$ , donde tienen polos simples.

Era importante darle un sentido a  $(P \pm i0)^{\frac{n}{2}-k}$ . Esto está resuelto por S. E. Trione en un trabajo intitulado "Sobre la fórmula de L. Schwartz", 1973. El título se debe a que se obtiene una importante fórmula (sin demostración) de L. Schwartz que expresa la transformada de Fourier de  $\frac{1}{|x|^{n+2h}}$ ,  $h$  entero positivo. Nuestra fórmula permite dar un sentido de modo natural a los llamados "infinitos" de la electrodinámica cuántica.

Este teorema que relaté no es tan sólo un desvarío, un juego intelectual matemático. En efecto, es usual que me pregunten para qué sirve lo que hago, más aún han llegado a preguntarme si sirve para aplicaciones a la realidad nacional. Me resulta fácil responder que la Teoría Cuántica es imprescindible en los niveles atómico, subatómico y nuclear. Pero también en la vida real, pues se usa en la electrónica (transistores, microprocesadores y componentes eléctricos), semiconductores y superconductores; en criptografía, en cosmología teórica y para la instrumentación médica: láseres y tomógrafos.

En efecto, cito textualmente lo escrito por Henri Poincaré (1854-1912):

*"La creación matemática, sin embargo, no consiste simplemente en hacer combinaciones de cosas ya conocidas: cualquiera puede hacer esto, pero las combinaciones así practicadas serían infinitas en número, y la mayor parte de ellas completamente desprovistas de interés. Crear consiste precisamente en evitar las combinaciones inútiles y realizar aquellas que son útiles y que constituyen una pequeña minoría. Invención es discernimiento, selección".*

Dos importantes propiedades de  $G_\alpha(P \pm i0, m, n)$ , análogas a las del núcleo de Calderón son:

i) Teorema 1 (S. E. Trione) Vale la siguiente fórmula

$$\{\diamond + m^2\}^k G_{2k}(P \pm i0, m, n) = \delta. \quad (22)$$

La fórmula (22) significa que las distribuciones  $G_{2k}(P \pm i0, m, n)$ ,  $n \geq 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$  son soluciones elementales causales (anticausales) del operador ultrahiperbólico de Klein- Gordon, iterado  $k$  veces.

ii) Teorema 2 (S. E. Trione) La siguiente expresión es válida:

$$G_0(P \pm i0, m, n) = \delta. \quad (23)$$

**Notas**

1. Las soluciones elementales  $G_{2k}(P \pm i0, m, n)$  tienen la misma forma para todo  $n \geq 2$ . No pasa con otras soluciones elementales que dependen de la paridad de  $n$ .

2. El caso particular del Teorema 1 correspondiente a  $n = 4, k = 1, q = 1, q = , n^0$  de términos negativos de la forma  $P(x)$  es especialmente importante.

En este caso, las correspondientes soluciones elementales son:

$$G_2(P + i0, m, 4) = -\frac{mi}{4\pi^2} K_1 \left\{ \left[ m^2 (P + i0) \right]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$G_2(P - i0, m, 4) = \frac{mi}{4\pi^2} K_1 \left\{ \left[ m^2 (P - i0) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

La fórmula (24) es una expresión útil de la famosa “función mágica” o “propagador causal” de Feynman (Richard Feynman, estadounidense, Premio Nobel de Física, 1965).

Es por esta razón que hemos decidido llamar causal (anticausal) a la distribución  $G_\alpha(P \pm i0, m, n)$ .

**9. Novena definición de la  $\delta$  (S. E. Trione)**

Poniendo  $m = 0$  en  $G_\alpha(P \pm i0, m, n)$  resultan las distribuciones causales (anticausales):

$$H_\alpha(P \pm i0, n) = \frac{e^{\frac{\pi\alpha}{2}} e^{\pm \frac{\pi}{2}q} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha (\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (P \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}},$$

$\alpha \in \mathbb{C}, q$  es el número de términos negativos de la forma cuadrática  $P = P(x)$ . Las distribuciones  $H_\alpha(P \pm i0, n)$  son las análogas causales (anticausales) del núcleo elíptico de Marcel Riesz y tiene análogas propiedades. Las principales propiedades son:

i)  $H_{2k}(P \pm i0, n)$  es la solución causal (anticausal) del operador ultrahiperbólico, iterado  $k$  veces ( $k \geq 1$ ):

$$\diamond^k H_{2k}(P \pm i0, n) = \delta, \tag{26}$$

$$\diamond^k = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right\}^k, \quad p + q = n.$$

ii)  $H_0(P \pm i0) = \delta. \tag{27}$

**Notas**

1. La transformada de Fourier de  $G_\alpha (P \pm i0, m, n)$  es:

$$\mathfrak{F}[G_\alpha (P \pm i0, m, n)] = \frac{e^{\frac{\pi\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (m^2 + Q \pm i0)^{-\frac{\alpha}{2}}, \tag{28}$$

donde

$$(m^2 + Q \pm i0)^\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (m^2 + Q \pm i\epsilon |x|^2)^\alpha, \tag{29}$$

$$Q = Q(y) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2, \quad p + q = n.$$

2. La transformada de Fourier de  $H_\alpha (P \pm i0, n)$  es:

$$\mathfrak{F}[H_\alpha (P \pm i0, n)] = \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (Q \pm i0)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{30}$$

3. Valen las siguientes productos multiplicativos (S. E. Trione)

i)  $(P \pm i0)^\lambda \cdot (P \pm i0)^\mu = (P \pm i0)^{\lambda+\mu}, \tag{31}$

$$\lambda, \mu, \lambda + \mu \in \mathbb{C}$$

y

ii)  $(m^2 + Q \pm i0)^\lambda \cdot (m^2 + Q \pm i0)^\mu = (m^2 + Q \pm i0)^{\lambda+\mu}, \tag{32}$

$$\lambda, \mu, \lambda + \mu \in \mathbb{C}.$$

**III.  $\delta^2 = 0$  y  $\delta^k = 0, k=1,2,\dots$**

Sea

$$(x \pm i0)^\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x \pm i\epsilon)^\lambda,$$

donde el límite es entendido en el sentido de las distribuciones. El producto multiplicativo  $(x \pm i0)^\lambda \cdot (x \pm i0)^\mu, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , aparece frecuentemente en la teoría cuántica de campos y no tiene, en principio, sentido. B. Fisher esboza una demostración de la validez del producto multiplicativo

$$(x \pm i0)^\lambda \cdot (x \pm i0)^{\lambda+\mu}, \lambda, \lambda + \mu \in \mathbb{C}$$

Nuestro método apela a la definición de  $(x \pm i0)^\lambda$  y a la aproximación por funciones (de idéntica estructura). Resulta

$$(x \pm i0)^\lambda \cdot (x \pm i0)^\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x \pm i\epsilon)^\lambda \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x \pm i\epsilon)^\mu =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x \pm i\epsilon)^{\lambda+\mu} = (x \pm i0)^{\lambda+\mu}.$$

Esta definición de producto multiplicativo está íntimamente relacionada con los métodos usados por Mikusinski y Vladimirov. Por comodidad exhibo las definiciones de la  $\delta(x)$  a continuación:

### Definiciones de las $\delta$ y $\delta^{(n)}$ de Dirac

1.  $\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \delta(\bar{x}), \varphi(\bar{x}) \rangle = \varphi(0)$
2.  $R_\alpha(x) \Big|_{\alpha=0} = \delta$
3.  $R_\alpha(x) \Big|_{\alpha=-n} = \delta^{(n)}$
4.  $\lim_{v \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1-v}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{1-v}{v}\right)x^2} \right] = \delta$
5.  $\delta = \varphi(0) = -\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^2}{\pi^4} \int_{\mathbb{R}^4} \sin(vp^2) \varphi(p) d^4 p$
6.  $\frac{\Omega_n}{(2\pi)^2} a^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n}{2}}(at) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \delta$
7.  $\diamond^k R_{2k}(u) = \delta$
8.  $R_0(u) = \delta$
9.  $\{\diamond + m^2\} W_{2k}(u, m) = \delta$
10.  $W_0(u, m) = \delta$
11.  $\diamond^k A_{2k} = \delta$
12.  $A_0 = \delta$
13.  $\{\diamond + m^2\}^k G_{2k}(P \pm i0, m, n) = \delta$
14.  $G_0(P \pm i0, m, n) = \delta$
15.  $\diamond^k H_{2k}(P \pm i0, n) = \delta$
16.  $H_0(P \pm i0) = \delta$

Las demostraciones de los productos multiplicativos  $\delta^2$  y  $\delta^k = 0$ ,  $k=1, \dots$ , resultan del mismo modo que la prueba de (33), usando la definición de la  $\delta$  (cualquiera de las nueve definiciones) y aproximando los factores por núcleos singulares distribucionales de idéntica estructura  $(R_\alpha(x), R_\alpha(u), W_\alpha(u, m), G_\alpha(P \pm i0, m, n), H_\alpha(P \pm i0, m, n))$ .

Las demostraciones aparecen, detallada y explícitamente, en los libros y artículos de la bibliografía. Observo que las herramientas fundamentales para obtener los resultados fueron las transformadas de Fourier y de Laplace de distribuciones. Así concluimos que:

$$\delta^2 = 0,$$

y

$$\delta^k = 0, \quad k=1, 2, \dots;$$

en todos los casos en que consideremos las diversas definiciones anteriormente enunciadas de la  $\delta$  de Dirac.

## Bibliografía

- [1] P. Antosik, J. Mikusinski and P. Sikorski, "Theory of distributions". *The sequential approach*, Amsterdam, Warsawa, 1973.
- [2] N. Aronszajn and K. T. Smith, "Theory of Bessel potentials", Part I, *Ann. Inst. Fourier*, II, 1961, 385-475.
- [3] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction á la théorie quantique des champs*, Dunod, Paris, 1960.
- [4] J. J. Bowman and D. Harris, "Green's distributions and the Cauchy problem for the iterated Klein-Gordon operator", *J. Math. Phys.*, vol. 3, 1964, 396-404.
- [5] D. W. Bresters, "On distributions connected with quadratic forms", S.I.A.M., *J. Appl. Math.*, vol. 16, 1968, 563-581.
- [6] A. P. Calderón, "Singular integrals" (notes on a course taught at the Massachusetts Institute of Technology), 1959 and "Lebesgue Space of Differentiable Functions and Distributions", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. IV, Partial Diff. Eq., 1961.
- [7] A. Erdelyi, Editor, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, Mc Graw-Hill, New York, 1953.
- [8] B. Fischer, "The generalized function  $(x + i0)^{\lambda}$ ", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 68, 1970, 77-708.
- [9] I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized Functions*, vol. I, Academic Press, New York, 1964.
- [10] A. González Domínguez y S. E. Trione, "Sul prodotto moltiplicativo di distribuzioni", *Rend. Classe Sci., Fis., Mat e Nat., Accad. Naz. dei Lincei, Serie VIII*, vol. LVII, Fasc. 5, 321-323, Novembre 1974.

- [11] A. González Domínguez and R. Scarfiello. Nota sobre la fórmula  $\nu p \frac{1}{x} \delta = -\frac{1}{2} \delta'$ . *Revista de la Unión Matemática Argentina*, Vol. XVII, 53-56, 1955.
- [12] A. González Domínguez and S. E. Trione, "On the Laplace Transforms of retarded, Lorentz-Invariant Functions", *Advances in Mathematics*, vol. 31, N° 1, January 1979, 51-62.
- [13] A. González Domínguez, "On some heterodox distributional products", Instituto Argentino de Matemática (IAM- CONICET), Argentina, *Trabajos de matemática*, N° 17, 1978. *Revista de la Unión Matemática Argentina dedicada al profesor Luis A. Santaló*, Vol. 29, N° 3, 180-196, 1980.
- [14] F. Guerra, "On analytic regularization in quantum field theory", *Il Nuovo Cimento*, vol. 1A, N° 3, 1971, 523-535.
- [15] J. Horváth, "Composition of Hypersingular Integral Operators", *Applicable Analysis*, vol. 7, 1978, 171-190.
- [16] J. Mikusinski, "On the square of the Dirac delta-distribution", *Bull. Acad. Polon. Sci.*, série des sciences math., astr. et phys., vol. 14, N° 9, 1966, 511-513.
- [17] M. Riesz, "L'intégrale de Riemman-Liouville et le problème de Cauchy", *Acta Math.*, 81, 1949, 1-223.
- [18] L. Schwartz, "Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions", *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences. Paris*, tomo 239, 1954, 847-848.
- [19] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [20] J. Schwinger, "Quantum Electrodynamics II. Vacuum polarization and self-energy", *Physical Review*, Vol. 75, 651-679, 1949.
- [21] S. E. Trione, "Soluzioni elementari causali dell'operatore di Klein-Gordon iterato", *Rend. Classe Sci. Fis. Mat. e Nat.*, Accad. Naz. dei Lincei, Serie VIII, vol. 41, fasc. 5, Maggio 1972, 607-610.
- [22] S. E. Trione, "Sobre una fórmula de L. Schwartz", *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. 26, 1973, 250-254.
- [23] S. E. Trione, "Sopra un teorema d'intercambio", *Accad. Naz. dei Lincei*, Serie VIII, LIX (5), 357-361, 1975.
- [24] S. E. Trione, "Distributional Products", *Cursos de Matemática*, 3, Instituto Argentino de Matemática (IAM) del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Buenos Aires, Argentina, 1980.
- [25] S. E. Trione, "On the  $\delta^2$  - product via the Marcel Riesz' kernels  $R_\alpha(U)$  and  $W_\alpha(u, m)$ ", *Far East J. Mat. Sci.*, India, 1-7, 2006.
- [26] S. E. Trione, *On the  $\mathbb{L}[T(P \pm i0, \lambda)]$  and  $\mathbb{T}[T(P \pm i0, \lambda)]$  and Applications*, Thailand, libro, 110 páginas, 2008.
- [27] V. S. Vladimirov, *Methods of the Theory of Functions of Several Complex Variables*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1966.
- [28] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Second Edition, Cambridge University Press, 1944.

[29] A. H. Zemanian, *Generalized Integral Transforms*, Interscience, New York, 1968.

Consejo Nacional de Investigaciones  
Científicas y Técnicas, Argentina.  
Instituto de Investigación y Desarrollo  
de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires