

**RESULTADOS RECIENTES
DE LA TEORÍA DE FLUJOS REPTANTES
CON FRONTERA LIBRE**

*Comunicación efectuada por el Dr. Carlos Alberto Perazzo
en la sesión privada extraordinaria
de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires
del 27 de junio de 2008*

Resumen

El estudio de los flujos de líquidos viscosos con una superficie libre es muy importante debido a que éstos son muy frecuentes tanto en la naturaleza como en procesos artificiales. El planteo completo del problema y su resolución presentan una gran complejidad, tanto matemática como computacionalmente, debido en gran medida a que determinar la forma de la superficie libre del flujo es parte del problema. Sin embargo, si el flujo satisface ciertas condiciones es posible aplicar la llamada aproximación de lubricación para simplificar fuertemente la cuestión y estudiar este tipo de corrientes con un bajo costo computacional. Aquí se mostrará cómo aplicar la aproximación de lubricación y a modo de ejemplo se estudiará la formación de crestas en flujos convergentes de líquidos viscosos.

Abstract

The study of slow viscous flows with a free surface is very important because these flows occur frequently in nature as well as in artificial processes. The full statement of the problem and its resolution involve a great mathematical and computational difficulty, mainly because assessing the shape of the free surface is part of the problem. However, if the flow satisfies certain conditions it is possible to apply the lubrication approximation to simplify the problem and to study this kind of flows with a low computational cost. Here we will show how to apply the lubrication approximation and as an example we will investigate the formation of ridges in convergent flows of viscous liquids.

Introducción

Existen una gran cantidad de procesos, tanto naturales como artificiales, que pueden ser descritos como el flujo lento de una capa delgada de un líquido viscoso con una superficie libre (o interfase) sobre un substrato rígido. Como ejemplos de esta clase de fenómenos podemos citar la formación de gotas de agua en una planta por condensación de humedad, el movimiento del líquido lagrimal sobre el globo ocular, el derrame de una gota de lluvia sobre un vidrio, el flujo de lava, la formación de cordilleras, procesos industriales de recubrimientos de superficies, la aplicación de pintura, el secado de super-

ficies mojadas, etc. Nótese que estos fenómenos son muy diversos, y que poseen escalas temporales y espaciales características muy diferentes. Dependiendo del proceso en particular bajo estudio el flujo es impulsado por diferentes fuerzas tales como la gravedad, tensión superficial, fuerzas de interacción con el sustrato, fuerza centrífuga, etc., pero en todos los casos la dinámica está gobernada por el balance de estas fuerzas con las fuerzas viscosas.

Las ecuaciones que gobiernan este tipo de corrientes son extremadamente complejas, y su resolución implica hallar la forma de la superficie libre de la corriente y el campo de velocidades y de presión dentro del dominio definido por los contornos fijos del problema y la superficie libre misma. Llevar esto adelante requiere de cálculos numéricos sumamente extensos y complicados. Sin embargo, si se garantiza que el número de Reynolds es suficientemente bajo como para desprestigiar los efectos inerciales y si la corriente es suficientemente delgada, es posible reducir enormemente la complejidad del problema y estudiarlo numéricamente sin un gran costo computacional, e incluso en ocasiones es posible obtener resultados en forma cerrada.

Aquí se mostrará el formalismo para estudiar este tipo de corrientes, conocido en la literatura como aproximación de lubricación, y se presentarán resultados obtenidos al estudiar la formación de crestas producidas por el movimiento convergente del sustrato utilizando dicha aproximación.

Aproximación de lubricación

Sea una capa de espesor $H \equiv H(X, T)$ no uniforme de un líquido de densidad ρ , viscosidad μ y tensión superficial σ (que puede ser no uniforme y por lo tanto dar lugar a las fuerzas de Marangoni), que fluye sobre una superficie rígida con las coordenadas dispuestas tal como se muestra en la figura 1. Supondremos que el sustrato es plano y forma un ángulo α con la horizontal, y que sobre el líquido sólo actúan las fuerzas de gravedad (g es la aceleración de la gravedad) y una fuerza de volumen cuyo potencial es $\Pi = \Pi(X, Z)$ ejercida por el plano (por ejemplo del tipo de Van der Waals). Por simplicidad asumiremos que la velocidad \mathbf{U} sólo tiene componentes X y Z .

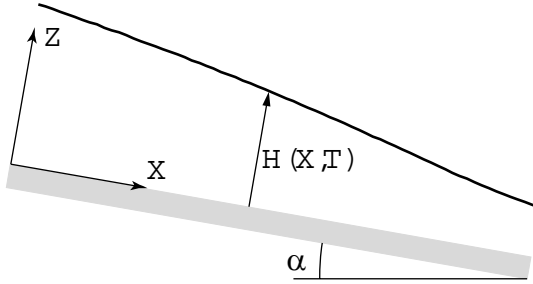


Figura 1. Geometría del problema

La conservación de la cantidad de movimiento y la ecuación de continuidad resultan

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \rho \mathbf{g} - \nabla \Pi, \quad \mathbf{U} = V \hat{\mathbf{i}} + W \hat{\mathbf{k}}, \quad (1)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{U}.$$

En el sustrato imponemos la condición de no deslizamiento $\mathbf{U} = 0$, y sobre la superficie libre $Z = H$ pedimos que

$$H_T + V H_X = W, \quad (2)$$

$$\Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\kappa \sigma \hat{\mathbf{n}} + \frac{\partial \sigma}{\partial s} \hat{\mathbf{t}},$$

donde Σ es el tensor de esfuerzos en el líquido, $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal exterior a la superficie, $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector unitario tangente a la superficie, κ es la curvatura media de la superficie y s es la longitud de arco a lo largo de la superficie. La primera de estas ecuaciones es la condición cinemática según la cual la componente normal a la superficie de la velocidad del líquido es igual a la velocidad de la interfase. En la componente tangencial de la segunda condición se equilibran los esfuerzos de corte sobre la interfase con el gradiente de tensión superficial, mientras que en la componente normal se equilibran los esfuerzos normales en la superficie con la presión de Laplace.

El sistema (1-2) junto con las condiciones iniciales forman un sistema cerrado cuya solución puede sólo encontrarse numéricamente (excepto en casos sumamente triviales). Nótese que resolver este sistema implica determinar no sólo la incógnitas V , W y P , sino también el dominio de la solución determinado por la superficie libre $Z = H(X, T)$. Este último hecho es el que le confiere al problema una

gran dificultad. Veremos ahora cómo es posible simplificar nuestro problema si la corriente satisface ciertas condiciones.

Sean H_0 un espesor característico de la corriente, X_0 una longitud característica y V_0 una velocidad característica de la corriente. La aproximación de lubricación consiste en asumir dos hipótesis sobre el flujo: que la corriente es delgada, dicho más formalmente que $H_0 / X_0 \ll 1$, y que el flujo es lo suficientemente lento como para que $Re \equiv V_0 H_0 \rho / \mu \sim O(1)$, y entonces se puede despreciar la inercia. Gracias a estas dos hipótesis el problema resulta drásticamente simplificado (ver Oron, Davis & Bankoff 1997 para una explicación detallada). Bajo estas condiciones resulta $V \ll W$ por lo que la velocidad del líquido tiene prácticamente sólo componente paralela al substrato, la presión resulta

$$P = \rho g (H - Z) \cos \alpha - \sigma H_{xx} + \Pi(X, H) - \Pi(X, Z), \quad (3)$$

y V es una función cuadrática de Z , es decir que el perfil de velocidad resulta parabólico. Si indicamos como \bar{V} al promedio vertical de la velocidad V obtenemos

$$\bar{V} = -\frac{\rho g \cos \alpha}{3\mu} H^2 H_x + \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} H^2 + \frac{\sigma}{3\mu} H^2 H_{xxx} + \frac{\sigma_x}{3\mu} H^2 H_{xx} - \frac{1}{3\mu} H^2 \Pi_x, \quad (4)$$

donde ahora $P = P(X, H(X, T))$. La ecuación de conservación de la masa adopta ahora la forma $H_T + (H)_x = 0$, que junto con la (4) nos da la siguiente ecuación

$$H_T = \left\{ \frac{\rho g \cos \alpha}{3\mu} H^3 H_x - \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} H^3 - \frac{\sigma}{3\mu} H^3 H_{xxx} - \frac{\sigma_x}{3\mu} H^3 H_{xx} + \frac{1}{3\mu} H^3 \Pi_x \right\}_x, \quad (5)$$

que determina la evolución de la superficie libre. En este punto es posible apreciar la enorme simplificación que trae aparejada la aproximación de lubricación: todo el problema queda ahora reducido a obtener H resolviendo la (5), que es una ecuación diferencial (no lineal) en derivadas parciales, y posteriormente de (3) y (4) obtenemos P y V . Además, una simple inspección visual del miembro derecho de la ecuación (5) nos permite interpretar rápidamente el significado de cada término y entender la influencia que tiene sobre la corriente cada una de las fuerzas presentes. El primero de estos términos representa la tendencia de la superficie a eliminar las diferencias en H debida a la componente de la gravedad perpendicular al substrato. El segundo representa la tendencia que tiene el líquido a fluir cuesta abajo impulsado por la componente de la gravedad paralela al

substrato. El tercer término representa el movimiento debido a la tensión superficial y el cuarto debido al efecto Marangoni. El último término da cuenta del flujo provocado por el gradiente de Π .

Existen una gran cantidad de trabajos en los cuales se estudia la aproximación de lubricación y su aplicación a diferentes tipos de flujos, pero aquí solo citamos algunos por brevedad (Oron, Davis & Bankoff 1997, Myers 1998, Stone 2002, Kondic 2003). Veamos ahora la aplicación de la aproximación de lubricación a la formación de crestas en fluidos viscosos.

Formación de crestas en flujos convergentes

Consideremos una capa líquida delgada inicialmente con espesor uniforme H_0 que descansa sobre un substrato horizontal dividido en dos partes. Asumimos que sobre el líquido sólo actúa la gravedad. Para $T > 0$ ambas mitades del substrato son empujadas la una hacia la otra con una velocidad constante $V_0 > 0$ (ver figura 2). Este movimiento arrastra el líquido de modo de producir una cresta en el lugar donde ambas partes del substrato convergen. La evolución de la cresta está entonces determinada por el arrastre viscoso realizado por el substrato sobre el líquido que tiende a acumular líquido y por el propio peso del líquido que tiende a desparramarlo lateralmente. Este tipo de flujos fue recientemente estudiado numérica y teóricamente (Perazzo & Gratton 2008) y es un modelo muy sencillo del proceso de formación de cordilleras (Buk & Sokoutis 1994).

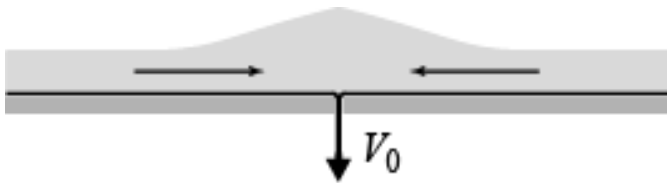


Figura 2. Formación de una cresta por el movimiento convergente de substrato

Debido a la simetría del problema, es suficiente considerar el flujo en $X > 0$ y suponer que en $X = 0$ hay una pared impermeable. De acuerdo a la sección anterior, la evolución de la superficie libre está dada por

$$H_T = V_0 H_X + \frac{\rho g}{3\mu} (H^3 H_X)_X, \quad (6)$$

con la condición de contorno en la pared dada por

$$H^2 H_x \Big|_{x=0} = -\frac{3\mu V_0}{\rho g}, \quad (7)$$

y la condición inicial

$$H(X, T = 0) = H_0. \quad (8)$$

Para resolver numéricamente el problema (6-8) definimos las variables adimensionales x , t y h del siguiente modo

$$x \equiv \frac{3\nu V_0}{g H_0^3} X, \quad t \equiv \frac{3\nu V_0^2}{g H_0^3} T, \quad h \equiv \frac{H}{H_0}. \quad (9)$$

Por lo tanto las ecuaciones adimensionales que gobiernan el problema resultan

$$h_t = h_x + (h^3 h_x)_x, \quad h(x, 0) = 1, \quad h^2 h_x \Big|_{x=0} = -1. \quad (10)$$

En la figura 3 se muestran perfiles de h a diferentes tiempos.

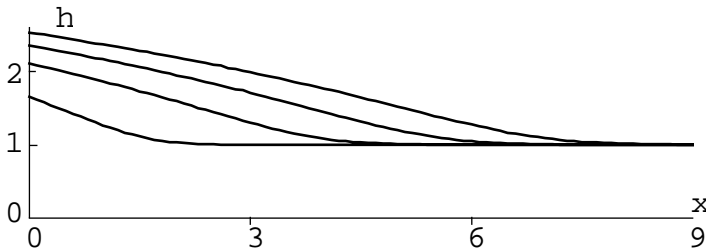


Figura 3. Perfiles numéricos para $t = 0.6, 2.4, 4.2$ y 6 .

Una primera inspección de estas soluciones revela algunas características del proceso. Se puede observar que h tiene un punto de inflexión que a medida que crece t se desplaza hacia x mayores y tiende hacia la parte del relieve donde h se aproxima a 1. También se observa que el cociente de aspecto (altura / ancho) disminuye con el tiempo. Esto se debe a que al crecer la cresta, el ancho del relieve aumenta más rápidamente porque el término difusivo de la ecuación (10) escala como h^4 .

Si consideramos tiempos suficientemente cortos el perfil diferirá poco del inicial, por lo que podemos asumir que $h = 1 + z$ con $z \ll 1$. Así el problema (10) puede ser linealizado y queda reducido a

$$z_t = z_x + z_{xx}, \quad z(x, 0) = 0, \quad z_x \Big|_{x=0} = -1. \quad (11)$$

En este régimen el problema admite una solución autosemejante dada por

$$z = 2\sqrt{t} \left[\frac{e^{-\psi^2}}{\sqrt{\pi}} - \psi \operatorname{erfc}(\psi) \right], \quad \psi = \frac{x}{2\sqrt{t}}, \quad (12)$$

donde $\operatorname{erfc}(\psi)$ es la función error complementaria. Notemos que en este régimen tanto la altura (por encima del valor 1) como el ancho de la cresta aumentan como $t^{1/2}$ en tanto la razón de aspecto es constante y el área aumenta como t .

Si t es muy grande, existe un régimen autosemejante que satisface la condición de contorno en $x = 0$ y la conservación de la masa. Este régimen está definido por (ver Perazzo & Gratton 2008 para más detalles)

$$h = h_w \left(1 - \frac{x}{x_f} \right)^{1/3}, \quad \text{si } x < x_f, \quad h = 0, \quad \text{si } x > x_f, \quad (13)$$

donde

$$h_w = \sqrt{2}t^{1/4}, \quad \text{y } x_f = \frac{\sqrt{8}}{3}t^{3/4}. \quad (14)$$

En este régimen autosemejante la altura crece como $t^{1/4}$ y el ancho como $t^{3/4}$. Estas leyes de escala coinciden con las encontradas por Gratton 1989, quien estudió la evolución de la altura y el ancho de cordilleras por medio del análisis dimensional.

Una mejor aproximación que (13-14) puede ser obtenida por medio de una solución cuasi autosemejante. Se encuentra así una solución aproximada de la forma

$$h = h_w \left(1 - \frac{x}{x_f} \right)^{1/3}, \quad \text{si } x < a, \quad h = 1, \quad \text{si } x > a, \quad (15)$$

donde $a = x_f - 1/3$ es el semiancho de la cresta, y h_w y x_f están dados por

$$h_w = b t^{1/4}, \quad \text{y } x_f = \frac{b}{3} t^{3/4}, \quad (16)$$

donde b es la raíz real y positiva del polinomio $b^4 - (4 + b t^{-1/4})^3$.

Conclusiones

Hemos visto que gracias a la aproximación de lubricación es posible estudiar flujos lentos viscosos con una superficie libre de

modo sencillo y con un bajo esfuerzo computacional. En particular estudiamos la formación de crestas en flujos viscosos que convergen arrastrados por el movimiento del sustrato. Dedujimos las ecuaciones que gobiernan este fenómeno y establecimos la existencia de dos regímenes autosemejantes, uno para tiempos cortos y el otro para tiempos largos.

Referencias

- Buck, W. R. & Sokoutis, D. 1994. "Analogue Model of Gravitational Collapse and Surface Extension during Continental Convergence", *Nature* **369**, 737-740.
- Myers, T. G. 1998. "Thin films with high surface tension", *SIAM Rev.* **40**, 441-462.
- Kondic, L. 2003. "Instabilities in Gravity Driven Flow of Thin Fluid", *SIAM Rev.* **45**, 95-115.
- Perazzo, C. A. & Gratton, J. 2008. "Asymptotic regimes of ridge and rift formation in a thin viscous sheet model", *Physics of Fluids* **20**, 043103.
- Gratton, J. 1989. "Crustal shortening, root spreading, isostasy, and the growth of orogenic belts: A dimensional analysis", *J. Geophys. Res.* **94**, 15627-15634.
- Oron, A., Davis, S. H. & Bankoff S. G. 1997. "Long-scale evolution of thin liquid films", *Rev. Mod. Phys.* **69**, 931-980.
- Stone, H. A. 2002. "Partial differential equation in thin film flows in fluid dynamics: spreading droplets and rivulets", en *Nonlinear PDE's in condensed matter and reactive flows*, Springer.

Universidad Favaloro y CONICET
Solís 453, 1078 Buenos Aires, Argentina
perazzo@favaloro.edu.ar