PUNTOS FIJOS EN ESPACIOS DE DISTRIBUCIONES

Comunicación efectuada
por el Académico Titular Dr. Julio H. G. Olivera
en la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires,
sesión plenaria del 30 de mayo de 2011

PUNTOS FIJOS EN ESPACIOS DE DISTRIBUCIONES

Dr. JULIO H. G. OLIVERA

Resumen

Un conjunto tiene la propiedad de punto fijo si cada transformación continua del conjunto en sí mismo posee un punto fijo. En esta nota demostramos que todo conjunto acotado maximal de funciones generalizadas tiene la propiedad de punto fijo. El teorema es válido para los tres espacios fundamentales de distribuciones: D′, E′ y S′.

Abstract

Fixed points in spaces of distributions. A set has the fixed-point property if each continuous transformation of the set into itself possesses a fixed point. In this paper we show that every maximal bounded set of generalized functions has the fixed-point property. The theorem applies to the three fundamental spaces of distributions: D′, E′ and S′.

1. Introducción

El concepto de equilibrio desempeña un importante papel tanto en las ciencias naturales como en las ciencias sociales: equilibrio de un sistema de fuerzas, en Mecánica; equilibrio de mercado, en Teoría Económica; equilibrio social, en Sociología.

La noción matemática correspondiente es la de punto fijo. Dada una transformación $F: E \to E$, se dice que F posee un punto fijo si existe un elemento $x \in E$ tal que $F(x) = x$.

Si E designa un espacio topológico, se dice que $S \subset E$ tiene la propiedad de punto fijo si toda transformación continua T de S en S posee un punto fijo. En esta definición la continuidad se refiere a la topología inducida por E.

Objeto de la presente nota son las propiedades de punto fijo de subconjuntos del espacio D′, el espacio de distribuciones de L. Schwartz o funciones generalizadas.

2. Proposiciones

TEOREMA. Todo conjunto acotado maximal de distribuciones tiene la propiedad de punto fijo.

La demostración consta de tres partes:

1) Sea B un conjunto acotado de distribuciones. Puesto que D′ es un espacio de Montel, la clausura C del conjunto B es un conjunto compacto. Según se muestra en [4] C es metrizable. En cuanto conjunto metrizable y compacto, C posee una base numerable y resulta homeomorfo a un subconjunto del espacio de Hilbert I^N (el “cubo de Hilbert” o “cubo unidad”).

2) Ordenemos parcialmente los conjuntos acotados del espacio D′ por medio de las relaciones de inclusión. Dado que la unión de dos conjuntos acotados cualesquiera es un conjunto acotado, todo conjunto acotado maximal de distribuciones es homeomorfo a I^N.

3) El espacio I^N es un retracto absoluto y, por tanto, constituye un retracto local absoluto y es acíclico. De esto se deduce inmediatamente ([2], capítulo IV) que el espacio I^N y, en consecuencia, todo conjunto acotado maximal de distribuciones, tiene la propiedad expresada por el teorema.

COROLARIO. Toda contracción hK., $0 < | h | < 1$, de un conjunto acotado maximal de distribuciones K tiene la propiedad de punto fijo.

Esta proposición surge de los hechos siguientes:

1) La propiedad de punto fijo es un invariante topológico.

2) En espacios vectoriales topológicos la multiplicación por un escalar no nulo es un homeomorfismo.

3. Observaciones

1) El teorema precedente vale asimismo para los otros dos espacios clásicos de distribuciones: el espacio S′ de distribuciones de cre-

cimiento lento, vinculado a modernos avances de las ciencias matemáticas ([3]), y el espacio E′ de distribuciones con soporte compacto.

2) Una ulterior generalización puede ser útil para las aplicaciones al Análisis Económico. Consideremos una función F de punto a conjunto, semicontinua superiormente ([1]), tal que en cada punto x el conjunto F(x) sea acíclico; x es un punto fijo cuando $x \in F(x)$. El resultado no varía: todo conjunto acotado maximal de distribuciones tiene la propiedad de punto fijo.

Referencias

[1] C. Berge, *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, París, 1966.

[2] L. Górniewicz, *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, Dordrecht, 1999.

[3] J. P. Kahane, "Les sciences mathématiques à l'aube du 21e siècle", *Travaux mathématiques*, fascicule XV (2004) 197-209.

[4] J. H. G. Olivera, "Álgebras y polinomios distribucionales", *An. Acad. Ciencias de Buenos Aires*, XL (2006) 105-110.